

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΔΙΑΤΑΞΗ, ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ, ΡΙΖΕΣ, ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ****(ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)****ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$.

2. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

3. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$, β) $2x - 3y$, γ) $\frac{x}{y}$.

4. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$, β) $x^2 + y^2$.

6. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4\alpha$, **β)** $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

7. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, να δείξετε ότι:

α) $x \in (-3, 1)$

β) Η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

8. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: **α)** $A = x - y + 2$, **β)** $0 < A < 4$.

9. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) Να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$.

10. **α)** Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|1-2x| < 5$ και **ii)** $|1-2x| \geq 1$.

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

11. Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

12. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

14. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

15. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

17. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

18. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$, ii) όταν $\alpha = -3$.

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.