

A.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε. – Science, Technology, Engineering and Mathematics

Μάθημα: «Σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις»

Ενότητα: «Επίλυση προβλημάτων στα Μαθηματικά – Mathematica – Παραδείγματα»

Οδηγός χρήσης του Mathematica.
Διδακτικές εφαρμογές σε θέματα Μαθηματικών και Θετικών Επιστημών

Διδάσκων: Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

Το Mathematica ως γνωστικό εργαλείο

- Το Mathematica είναι ένα μαθηματικό πακέτο, το οποίο *συνδυάζει τα χαρακτηριστικά* (Κορρές, 2003 και Κορρές, 2007):
 - α) ενός *πακέτου συμβολικής άλγεβρας*, εφόσον μπορεί να κάνει αλγεβρικές πράξεις, όπου το αποτέλεσμα μπορεί να περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές,
 - β) ενός *εργαλείου οπτικοποίησης*, εφόσον δίνει τη δυνατότητα για τη σχεδίαση γραφικών παραστάσεων στο επίπεδο και στο χώρο με ευκολία, ταχύτητα και ακρίβεια,
 - γ) ενός *εργαλείου μοντελοποίησης συστημάτων*, εφόσον μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία μοντέλων πραγματικών καταστάσεων αλλά και θεωριών από διάφορους τομείς των θετικών κυρίως επιστημών και τη διερεύνηση τους μέσω στατικών και δυναμικών μεθόδων αναπαράστασης που επιτρέπουν την παρατήρηση της μεταβολής της συμπεριφοράς του μοντέλου ανάλογα με τη μεταβολή των παραμέτρων,
 - δ) ενός *μικρόκοσμου*, εφόσον είναι ένα εξερευνητικό μαθησιακό περιβάλλον για τις έννοιες των μαθηματικών και των μαθημάτων θετικών επιστημών γενικότερα, μέσα στο οποίο ο μαθητευόμενος μπορεί να ασχοληθεί με την κατασκευή και τον έλεγχο εσωτερικών διανοητικών μοντέλων, τα οποία στη συνέχεια μπορεί να τα αναπαραστήσει στο ίδιο περιβάλλον, έχοντας στη διάθεση του ένα ολοκληρωμένο συνδυασμό μικρόκοσμου–εργαλείου μοντελοποίησης–εργαλείου οπτικοποίησης σε ένα μόνο εργαλείο και
 - ε) μιας *γλώσσας προγραμματισμού*, με τις δομές της ακολουθίας, της επιλογής και της επανάληψης όπως και την ύπαρξη και δυνατότητα ορισμού διαφόρων δομών δεδομένων.

Το Mathematica στην υποστήριξη ανακαλυπτικών και κατασκευαστικών προσεγγίσεων

- Το Mathematica μπορεί να *χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά ως γνωστικό εργαλείο στην υποστήριξη ανακαλυπτικών – κατασκευαστικών προσεγγίσεων* στη διδασκαλία των Μαθηματικών και άλλων μαθημάτων Θετικών Επιστημών, εφόσον δίνει τη δυνατότητα:
 - α) Να σχεδιάσουμε *εύκολα και γρήγορα τη γραφική παράσταση* οποιασδήποτε συνάρτησης ή καμπύλης στο επίπεδο, μέσω του τύπου της συνάρτησης ή της εξίσωσης της καμπύλης.
 - β) Να μελετήσουμε *αναλυτικά τις γεωμετρικές ιδιότητες και τα γεωμετρικά μεγέθη* που αναφέρονται στις συναρτήσεις ή στις καμπύλες του επιπέδου είτε *μέσω στατικών αναπαραστάσεων* οι οποίες μπορούν να περιλαμβάνουν πολλαπλές καμπύλες στο ίδιο σχήμα, είτε *μέσω δυναμικών αναπαραστάσεων και κίνησης (animation)*.
 - γ) Να κάνουμε *εύκολα, γρήγορα και με μεγάλη ακρίβεια πολύπλοκους υπολογισμούς* αριθμητικούς ή αλγεβρικούς, οι οποίοι μπορούν να περιλαμβάνουν τόσο υπολογισμούς ορίων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων, όπως και τη λύση εξισώσεων.

Το Mathematica στην υποστήριξη ανακαλυπτικών και κατασκευαστικών προσεγγίσεων

- Το Mathematica είναι ένα *εύχρηστο εκπαιδευτικό εργαλείο*, το οποίο δεν απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις προγραμματισμού και επιτρέπει στους δασκάλους των Μαθηματικών να *οπτικοποιούν τις έννοιες των μαθηματικών* ούτως ώστε να μη φαντάζουν ξένες και απρόσιτες στους μαθητές.
- Να *σχεδιάζουν και να υλοποιούν δραστηριότητες* στις οποίες οι μαθητές θα μπορούν να *αυτενεργούν και να πειραματίζονται με τον απ' ευθείας χειρισμό των διαφόρων εννοιών και γεωμετρικών μεγεθών στα πλαίσια του λογισμικού*, αναπτύσσοντας με τον τρόπο αυτό, μία στάση εξερεύνησης και πειραματισμού απέναντι στα μαθηματικά.
- Επίσης να *σχεδιάζουν και να υλοποιούν δραστηριότητες* στις οποίες οι μαθητές θα μπορούν να *διαμορφώνουν εικασίες σχετικά με τα θέματα που διαπραγματεύονται, τις οποίες να ελέγχουν χρησιμοποιώντας το ίδιο το λογισμικό*. Μ' αυτόν τον τρόπο καλλιεργείται η *διαισθητική σκέψη των μαθητών*.
- Τέλος να *ελέγχουν οι ίδιοι οι μαθητές, πειραματικά, τα συμπεράσματα τα οποία τους παρουσιάζει ο δάσκαλος, ούτως ώστε η αλήθεια να προκύπτει ως προϊόν διαπραγμάτευσης και συμφωνίας μεταξύ των μελών της τάξης* έχουμε με τον τρόπο αυτό μία *κοινωνική κατασκευή της γνώσης*.

Χειρισμός του Mathematica

- Για να εκτελεστεί οποιαδήποτε εντολή πληκτρολογήσουμε ή να «φορτώσουμε» στη μνήμη οποιοδήποτε ορισμό πρέπει να πατήσουμε SHIFT και ENTER, ή αριθμητικό ENTER.
- Προτού εκτελεστεί οποιαδήποτε εντολή ή γίνει δεκτός οποιοσδήποτε ορισμός, γίνεται *συντακτικός έλεγχος* από το Mathematica. Στην περίπτωση που έχει γίνει *λάθος στην σύνταξη κάποιας εντολής ή ορισμού*, το πρόγραμμα *εμφανίζει κατάλληλο μήνυμα*, υπογραμμίζοντας το σημείο στο οποίο έχει γίνει το λάθος.
- Στη συνέχεια θα δούμε:
 - Το συμβολισμό των βασικών μαθηματικών συμβόλων, πράξεων και αντικειμένων στο Mathematica.
 - Πως μπορούμε να σχεδιάζουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μίας ή δύο μεταβλητών και καμπύλων στο επίπεδο και στο χώρο.
 - Πως μπορούμε να μελετάμε συναρτήσεις μέσω του πίνακα τιμών τους και της γραφικής απεικόνισης των σημείων του πίνακα τιμών.
 - Πως να δημιουργούμε απλές εντολές ως υποπρογράμματα.
 - Πως να φτιάχνουμε στατικές και δυναμικές αναπαραστάσεις της μεταβολής της γραφικής παράστασης ανάλογα με τη μεταβολή των παραμέτρων του τύπου της συνάρτησης.

(Κορρές, 2007, Κυριαζής, Ψυχάρης & Κορρές, 2012, Wolfram, 1996, Gray, 1998 και Torrence & Torrence, 1999)

Συμβολισμός στο Mathematica

Χρήση Παρένθεσης	Συνήθης Συμβολισμός	Συμβολισμός στο Mathematica
Σημείο του $\mathcal{H}^2$	$(x1, y1)$	$\{x1, y1\}$
Ομαδοποίηση	$a (b + c)$	$a (b + c)$ ή $a * (b + c)$
Συνάρτηση f εφαρμοσμένη σε μια μεταβλητή x	$f(x)$	$f[x]$

Χρήση Ισότητας	Συνήθης Συμβολισμός	Συμβολισμός στο Mathematica
Ορισμός συνάρτησης μίας μεταβλητής	$f(x) = \text{έκφραση του } x$	$f[x_] := \text{έκφραση του } x$
Αντικατάσταση	$x = a$	$x = a$
Παράσταση ή επίλυση εξίσωσης	$a x + \beta y = \gamma$	$a x + \beta y == \gamma$ ή $a * x + \beta * y == \gamma$

Συμβολισμός στο Mathematica

- Ο *πολλαπλασιασμός* συμβολίζεται με ένα κενό ή έναν αστερίσκο *.
Πολλές φορές είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε τον αστερίσκο, όταν μία έκφραση πρόκειται να συνεχιστεί σε μία επόμενη γραμμή.
- Το *εσωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων (a_1, a_2) και (b_1, b_2) του R^2 συμβολίζεται με $\cdot$, δηλαδή $\{a_1, a_2\} \cdot \{b_1, b_2\}$
και επιστρέφει την έκφραση:
 $a_1 b_1 + a_2 b_2$.
- Στο Mathematica, όπως στα συνήθη μαθηματικά, οι *συναρτήσεις* *διακρίνονται από τις τιμές τους*.
Η f είναι μία συνάρτηση της οποίας η τιμή στο x (το οποίο μπορεί να είναι είτε μία παράμετρος ή ένας αριθμός) είναι η $f[x]$.

Συμβολισμός στο Mathematica

Χρήση Συμβόλου	Συνήθης Συμβολισμός	Συμβολισμός στο Mathematica
Παράγωγος συνάρτησης f ως προς μεταβλητή x	$f'(x)$	$f'[x]$ ή $D[f[x], x]$
Τιμή της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο $x = a$	$f'(a)$	$f'[a]$ ή $D[f[x], x] /. x \rightarrow a$
Δεύτερη παράγωγος μιας συνάρτησης f ως προς μια μεταβλητή x	$f''(x)$	$f''[x]$ ή $D[f[x], \{x, 2\}]$

Χρήση Συμβόλου	Συνήθης Συμβολισμός	Συμβολισμός στο Mathematica
Αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης f ως προς μεταβλητή x	$\int f(x) dx$	$\text{Integrate}[f[x], x]$ ή $\int f(x) dx$
Ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης f ως προς μεταβλητή x στο διάστημα $[a, b]$	$\int_a^b f(x) dx$	$\text{Integrate}[f[x], \{x, a, b\}]$ ή $\int_a^b f(x) dx$

Γραφική παράσταση πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής

- Θεωρούμε μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής με τύπο $f(x)$ = έκφραση του x , όπου $x \in (a, b)$.
Η βασική εντολή για τη *χάραξη της γραφικής παράστασης μιας πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής* είναι η *Plot*.
Η εντολή *Plot* συντάσσεται με τους εξής τρόπους:
α) *Plot[f[x], {x, a, b}, επιλογές]*
β) *Plot[f[x] // Evaluate, {x, a, b}, επιλογές]*
- Η *διαφορά των δύο παραπάνω εντολών* είναι η εξής:
 - Χωρίς τη χρήση της εντολής *//Evaluate*, το πρόγραμμα αρχικά υπολογίζει ποιες τιμές του x από το διάστημα (a, b) θα χρησιμοποιηθούν και στη συνέχεια εκτιμάει και υπολογίζει την τιμή της f σε καθεμία από τις τιμές αυτές.
 - Με τη χρήση της εντολής *//Evaluate*, το πρόγραμμα αρχικά εκτιμάει την f δημιουργώντας μία συμβολική έκφραση στα πλαίσια της μεταβλητής x και στη συνέχεια εκτιμάει αυτήν την έκφραση αριθμητικά για τις συγκεκριμένες τιμές του x που απαιτούνται για τη χάραξη της γραφικής παράστασης.

Επιλογές γραφικών

Οι *επιλογές στην Plot* μπορούν να περιλαμβάνουν:

- 1) Την εντολή *AspectRatio*, η οποία ορίζει την *αναλογία ύψους-πλάτους του γραφήματος*.
 - Η εντολή *AspectRatio* → *Automatic* μας εξασφαλίζει ισότητα μονάδων στους δύο άξονες, δηλαδή ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
 - Η προκαθορισμένη τιμή (*default*) για την *AspectRatio* είναι 0.618, δηλαδή ο αντίστροφος του λεγόμενου «χρυσού λόγου» .
- 2) Την εντολή *Ticks*, η οποία αναφέρεται στη *διαγράμμιση των αξόνων*.
 - Ειδικότερα η εντολή *Ticks* → *None* αφαιρεί τη διαγράμμιση από τους άξονες.
 - Η εντολή *Ticks* → $\{Range[a, b, step1], Range[c, d, step2]\}$ ορίζει τη διαγράμμιση στον άξονα x να είναι μεταξύ των a και b με βήμα $step1$ και τη διαγράμμιση στον άξονα y να είναι μεταξύ των c και d με βήμα $step2$.
 - Με την εντολή *Ticks* → $\{Range[a, b, step1], Automatic\}$ η διαγράμμιση στον άξονα y καθορίζεται αυτόματα.
- 3) Την εντολή *Axes*, με την οποία καθορίζεται η *ύπαρξη ή μη αξόνων*.
 - Ειδικότερα η εντολή *Axes* → *None* αφαιρεί τους άξονες.
 - Η εντολή *Axes* → $\{True, False\}$ εμφανίζει τον άξονα x και αφαιρεί τον άξονα y .

Επιλογές γραφικών

- 4) Την εντολή *PlotRange*, η οποία αναφέρεται στα *σημεία τα οποία πρόκειται να συμπεριληφθούν στην γραφική παράσταση*.
- Ειδικότερα η εντολή *PlotRange* $\rightarrow \{a, b\}, \{c, d\}$ καθορίζει ότι θα χαραχθεί το τμήμα του ίχνους της καμπύλης το οποίο βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $x = a, x = b$ (ως προς τον άξονα $x'x$) και $y = c, y = d$ (ως προς τον άξονα $y'y$).
 - Η εντολή *PlotRange* $\rightarrow$ All επιτρέπει τη χάραξη όλων των σημείων του γραφήματος.
 - Με την εντολή *PlotRange* $\rightarrow$ Automatic βρίσκεται η κατανομή των τιμών των συντεταγμένων των σημείων που εμφανίζονται στο γράφημα και εξαιρούνται τα σημεία εκείνα τα οποία βρίσκονται επαρκώς εκτός της κατανομής.
 - Η προκαθορισμένη τιμή (default) για την *PlotRange* είναι η *PlotRange* $\rightarrow$ Automatic.
- 5) Την εντολή *PlotPoints*, η οποία καθορίζει το *πλήθος των σημείων στα οποία πρόκειται να εκτιμηθεί η καμπύλη προκειμένου να χαραχθεί το γράφημα του ίχνους της*. Προκειμένου να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στη σχεδίαση, η καμπύλη θα πρέπει να εκτιμηθεί σε ένα μεγάλο αριθμό σημείων.
- 6) Την εντολή *AxesLabel*, η οποία καθορίζει *τίτλους για τους άξονες*.
- Ειδικότερα, η εντολή *AxesLabel* $\rightarrow$ {τίτλος x -άξονα, τίτλος y -άξονα} αποδίδει τίτλους και στους δύο άξονες, ενώ η εντολή *AxesLabel* $\rightarrow$ τίτλος, αποδίδει τίτλο μόνο στον κατακόρυφο άξονα.
 - Η εντολή *AxesLabel* $\rightarrow$ None αφαιρεί τους τίτλους από τους άξονες.

Επιλογές γραφικών

- 7) Την εντολή *PlotStyle*, η οποία καθορίζει *το είδος των γραμμών ή των σημείων που πρόκειται να σχεδιαστούν*. Η εντολή *PlotStyle* μπορεί να περιλαμβάνει τις *εξής παραμέτρους*:
- Την παράμετρο *Thickness[value1]*, η οποία καθορίζει το *πάχος της γραμμής που σχεδιάζεται* ανάλογα με την τιμή της *value1*. Η παράμετρος *value1* παίρνει τιμές στο $[0, 1]$.
 - Την παράμετρο *GrayLevel[value2]*, η οποία *χρωματίζει την καμπύλη στις αποχρώσεις του γκρι*. Η παράμετρος *value2* παίρνει τιμές στο $[0, 1]$, με *GrayLevel[0]* να αντιστοιχεί στο μαύρο και *GrayLevel[1]* να αντιστοιχεί στο άσπρο.
 - Την παράμετρο *RGBColor[red, green, blue]*, η οποία *χρωματίζει την καμπύλη με συνδυασμούς του κόκκινου, πράσινου και μπλε χρώματος*. Οι παράμετροι *red, green, blue* παίρνουν τιμές στο $[0, 1]$ και ο συσχετισμός τους καθορίζει την υφή του τελικού χρώματος.
 - Την παράμετρο *Hue[value]* η οποία *χρωματίζει την καμπύλη ανάλογα με την τιμή της value* η οποία παίρνει τιμές στο $[0,1]$. Ενδεικτικά η επιλογή *Hue[1]* αντιστοιχεί στο κόκκινο, η επιλογή *Hue[0.7]* αντιστοιχεί στο μπλε και η επιλογή *Hue[0.4]* στο πράσινο.
 - Η εντολή *PlotStyle* μπορεί να εμφανιστεί με τις *εξής μορφές*:
 - α) *PlotStyle* $\rightarrow$ παράμετρος, αν έχουμε μόνο μία παράμετρο,
 - β) *PlotStyle* $\rightarrow$ {παράμετρος₁, παράμετρος₂, ...}, αν έχουμε περισσότερες από μία παραμέτρους.

Επιλογές γραφικών

- 8) Την εντολή *AxesOrigin*, η οποία καθορίζει την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο τομής των αξόνων που σχεδιάζονται.
- Ειδικότερα, η εντολή *AxesOrigin* $\rightarrow \{x, y\}$ καθορίζει ότι το σημείο τομής των αξόνων είναι το σημείο (x, y) .
 - Η εντολή *AxesOrigin* $\rightarrow$ Automatic χρησιμοποιεί έναν εσωτερικό αλγόριθμο για τον προσδιορισμό του σημείου τομής των αξόνων. Αν το σημείο $(0, 0)$ βρίσκεται μέσα ή κοντά στην περιοχή που σχεδιάζεται τότε συνήθως επιλέγεται αυτό ως η αρχή των αξόνων.
- 9) Την εντολή *DefaultFont*, η οποία καθορίζει τη γραμματοσειρά και το μέγεθος της γραμματοσειράς, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στη διαγράμμιση των αξόνων και στους τίτλους των αξόνων ή του γραφήματος.
- Ειδικότερα η επιλογή *DefaultFont* $\rightarrow \{"Times", 13\}$ καθορίζει η γραμματοσειρά στους άξονες και στους τίτλους αξόνων και γραφήματος να είναι η "Times New Roman" και το μέγεθος της γραμματοσειράς 13 στ.
 - Η εντολή *DefaultFont* δεν ισχύει στις νεότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως η έκδοση 10).

Χάραξη περισσότερων από μίας γραφικών παραστάσεων στο ίδιο γράφημα

Για τη χάραξη περισσότερων από μίας γραφικών παραστάσεων στο ίδιο γράφημα:

(I) Για να σχεδιάσουμε στο ίδιο γράφημα δύο συναρτήσεις $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, με το ίδιο πεδίο ορισμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την *Plot* με την εξής σύνταξη:

Plot[$\{f[x], g[x]\}$ //Evaluate, $\{x, a, b\}$, επιλογές]

- Οι περισσότερες επιλογές στην παραπάνω εντολή είναι οι ίδιες με τις επιλογές της συνήθους σύνταξης της εντολής.
- Η επιλογή που διαφέρει είναι η *PlotStyle*, η οποία συντάσσεται:
 - α) Αν έχουμε μία παράμετρο για την κάθε συνάρτηση:
PlotStyle $\rightarrow \{\text{παράμετρος συνάρτησης } f, \text{ παράμετρος συνάρτησης } g\}$
 - β) Αν έχουμε περισσότερες από μία παραμέτρους για την κάθε καμπύλη:
PlotStyle $\rightarrow \{\{\text{παράμετρος}_1 \text{ της } f, \text{ παράμετρος}_2 \text{ της } f, \dots\}, \{\text{παράμετρος}_1 \text{ της } g, \text{ παράμετρος}_2 \text{ της } g, \dots\}\}$

(II) Για να σχεδιάσουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής: $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο πεδίο ορισμού, στο ίδιο γράφημα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή *Show*.

- Η εντολή *Show* συντάσσεται ως εξής:
Show[αντικείμενο1, αντικείμενο2, ..., επιλογές]

Χάραξη περισσότερων από μίας γραφικών παραστάσεων στο ίδιο γράφημα

- Τα αντικείμενα που εμφανίζονται στην εντολή Show μπορούν να είναι *είτε* *διανύσματα ή γραφικές παραστάσεις καμπύλων ή συναρτήσεων στο επίπεδο*.
- Οι επιλογές που εμφανίζονται στην εντολή Show είναι οι ίδιες με τις επιλογές της εντολής Plot, με διαφορές στις προκαθορισμένες τιμές (default) των εντολών. Για παράδειγμα η προκαθορισμένη τιμή για την εντολή Axes στην Show είναι $\text{Axes} \rightarrow \text{False}$.
- Ειδικότερα για τις συναρτήσεις f και g χρησιμοποιούμε τις εντολές:
 $p = \text{Plot}[f[x] // \text{Evaluate}, \{x, a, b\}, \text{επιλογές}]$
 $q = \text{Plot}[g[x] // \text{Evaluate}, \{x, c, d\}, \text{επιλογές}]$
 $\text{Show}[p, q, \dots, \text{επιλογές}]$
- Η αντικατάσταση των γραφημάτων των δύο καμπύλων με p και q αντίστοιχα, μας επιτρέπει να *χρησιμοποιούμε τα εν λόγω γραφήματα ως αντικείμενα*, στα οποία αναφερόμαστε με τα ονόματα p και q .

Χάραξη περισσότερων από μίας γραφικών παραστάσεων στο ίδιο γράφημα

(III) Για να σχεδιάσουμε *στο ίδιο γράφημα το ίχνος μιας συνάρτησης* $f[n]: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ για *διαφορετικές τιμές κάποιας παραμέτρου n της συνάρτησης*, χρησιμοποιούμε την εντολή Table σε συνδυασμό με την Plot.

- Η σύνταξη της εντολής είναι:
 $\text{Plot}[\text{Table}[f[n][x], \{n, n_1, n_2, \text{step}\}] // \text{Evaluate}, \{x, a, b\}, \text{επιλογές}]$
Η παραπάνω εντολή σημαίνει: «Σχεδίασε τις γραφικές παραστάσεις $f[n]$, με n να παίρνει τιμές από n_1 έως n_2 με βήμα step , για $x \in (a, b)$ ».
- Η παραπάνω αναπαράσταση είναι μία «στατική» αναπαράσταση της μεταβολής της γραφικής παράστασης της $f(x)$, καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος n .
- Μία «δυναμική» αναπαράσταση της μεταβολής αυτής μπορεί να γίνει με τη χρήση των εντολών:
 - Do [έκφραση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n , n_1 , n_2 , step }]
στις παλαιότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως εκδόσεις 4 και 5).
 - Manipulate [έκφραση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n , n_1 , n_2 , step }]
στις νεότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως η έκδοση 10).
Η τελευταία εντολή δημιουργεί ένα γραφικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης με το χρήστη, όπου μετακινώντας έναν επιλογέα τιμών (slider) για την παράμετρο, τροποποιείται αυτόματα το γράφημα.

Χάραξη γραφικής παράστασης καμπύλης στο επίπεδο και στο χώρο

Θεωρούμε μία καμπύλη του επιπέδου με παραμετρική εξίσωση $\alpha(t) = (a_1(t), a_2(t))$, $t \in (a, b)$.

- Αρχικά ορίζεται η καμπύλη α :
 $\alpha[t_]:= \{a_1[t], a_2[t]\}$.
- Η βασική εντολή για τη χάραξη του ίχνους μιας καμπύλης του επιπέδου, η οποία δίνεται μέσω της παραμετρικής μορφής της είναι η `ParametricPlot`.
- Η εντολή `ParametricPlot` συντάσσεται με τους εξής τρόπους:
`ParametricPlot[alpha[t], {t, a, b}, επιλογές]`
`ParametricPlot[alpha[t]//Evaluate, {t, a, b}, επιλογές]`
- Οι επιλογές στην εντολή `ParametricPlot` χωρίζονται μεταξύ τους με κόμματα και είναι οι ίδιες με τις επιλογές της εντολής `Plot`.
- Η βασική εντολή για τη χάραξη του ίχνους μιας καμπύλης του χώρου, η οποία δίνεται μέσω της παραμετρικής μορφής της είναι η `ParametricPlot3D`.
- Οι επιλογές στην εντολή `ParametricPlot3D` χωρίζονται μεταξύ τους με κόμματα και είναι ίδιες ή αντίστοιχες με τις επιλογές της εντολής `Plot`, εκτός από την εντολή για την εμφάνιση του γραφήματος `PlotStyle`, η οποία δεν ισχύει.

Μελέτη συναρτήσεων – Πίνακας τιμών συνάρτησης και γραφική απεικόνιση σημείων

- Η βασική εντολή για τον πίνακα τιμών μιας συνάρτησης είναι:
`Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}]`
- Ο πίνακας τιμών μπορεί να πάρει την «παραδοσιακή» μορφή που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά με τη χρήση της εντολής `TableForm`:
`TableForm[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}], TableHeadings->{None, {"x", "f(x)"}}], TableAlignments->Right, TableDirections->Row]`
- Η γραφική παράσταση του πίνακα τιμών σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων γίνεται με τη χρήση της εντολής `ListPlot`:
`ListPlot[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}], επιλογές]`
- Μπορούμε να «πυκνώσουμε» σταδιακά τα σημεία στην γραφική παράσταση μειώνοντας το βήμα (`step`) στη σύνταξη της `Table`. Στη συνέχεια με τη χρήση της επιλογής `PlotJoined->True` ενώνουμε τα σημεία ώστε να προκύψει μία συνεχής γραμμή.
- Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα τιμών για διάφορες συναρτήσεις (ή τιμές των παραμέτρων συνάρτησης):
`TableForm[Table[{x, f[x], g[x], h[x]}, {x, a, b, step}], TableHeadings->{None, {"x", "f(x)", "g(x)", "h(x)"}}], TableDirections->Row, TableAlignments->Right]`

Υποπρογράμματα στο Mathematica

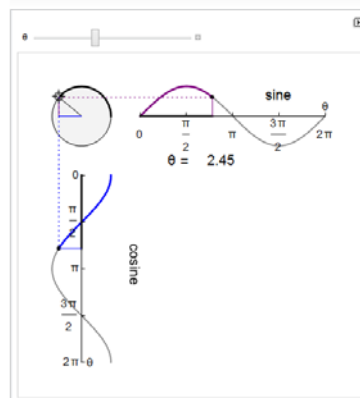
- Μπορούμε να μελετήσουμε τις συναρτήσεις, δημιουργώντας υποπρογράμματα στο Mathematica, μέσω των οποίων δημιουργούμε τον πίνακα τιμών συνάρτησης και απεικονίζουμε τα σημεία του πίνακα τιμών σε ένα σύστημα αξόνων.
- Δημιουργούμε τα υποπρογράμματα ως εξής:
`pinakastimon[f_,{a_,b_,step_}] :=
TableForm[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}], TableHeadings -> {None, {"x", "f(x)"}}],
TableAlignments -> Right, TableDirections -> Row]`
- `sxediaspinaka[f_, {a_, b_, step_}, {color_, enosi_}] :=
ListPlot[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}],
PlotStyle -> {If[enosi == True, Thickness[0.015], AbsolutePointSize[4]], color},
PlotJoined -> If[enosi == True, True, False], AspectRatio -> Automatic,
Ticks -> {Range[a, b, 1], Range[Min[Table[f[x], {x, a, b}]], Max[Table[f[x], {x, a, b}]], 1}]]`
- Στη συνέχεια αφού ορίσουμε μία συνάρτηση f καλούμε τα υποπρογράμματα ως απλές εντολές:
`pinakastimon[f, {a, b, step}]
sxediaspinaka[f, {a, b, step}, {color, enosi}]`

Γραφικό περιβάλλον στις νεότερες εκδόσεις του Mathematica

- Αντίστοιχα με τον ορισμό υποπρογραμμάτων, με τα οποία μπορούμε δημιουργήσουμε απλές εντολές για χρήση από τους μαθητές, μπορούμε να δημιουργήσουμε επιλογείς τιμών (sliders), με τη χρήση της εντολής `Manipulate` στις νεότερες εκδόσεις του Mathematica:

<http://demonstrations.wolfram.com/SpinningOutSineAndCosine/>

Spinning Out Sine and Cosine



Παραδείγματα ηλεκτρονικών φύλλων εργασίας στο Mathematica

- Παρακάτω παρουσιάζονται παραδείγματα ηλεκτρονικών φύλλων εργασίας στο Mathematica.
- Στα ηλεκτρονικά φύλλα εργασίας, η εντολή για τη «δυναμική» μεταβολή γραφήματος αντίστοιχα με τη μεταβολή των παραμέτρων που έχει χρησιμοποιηθεί είναι:
Do [έκφραση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n, n₁, n₂, step}]
η οποία ισχύει στις παλαιότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως εκδόσεις 4 και 5).
- Αν «τρέξει» κανείς τα παραπάνω φύλλα εργασίας σε κάποια νεότερη έκδοση, πρέπει να αντικαταστήσει την παραπάνω εντολή με την εντολή:
Manipulate [έκφραση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n, n₁, n₂, step}]
η οποία ισχύει στις νεότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως η έκδοση 10).

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ MATHEMATICA

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΡΡΕΣ

Το θέμα της γραμμικής συνάρτησης $y=kx+b$, είναι ένα σημαντικό θέμα τόσο για τη μαθηματική εκπαίδευση, όσο και για την εκπαίδευση των υπολοίπων μαθημάτων θετικών επιστημών, με πολλές και ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Το θέμα της γραμμικής συνάρτησης $y=kx+b$ εισάγεται με τη μορφή ενός απειροστικού προγράμματος, στο Γυμνάσιο και επαναδιαδίδεται, στο Λύκειο και έπειτα στα πρώτα έτη του Πανεπιστημίου, μάλιστα περισσότερο αναλυτικά στις Οικονομικές Σχολές.

Η προσέγγιση που ακολουθεί έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητευόμενους να κατασκευάσουν τη έννοια της γραμμικής συνάρτησης, μέσω μιας διαδραστικής ανακάλυψης, όπου θεωρούμε μία γραμμική συνάρτηση, δημιουργούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης, τον απεικονίζουμε σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, ώστε να δημιουργήσουν την ευκαιρία ότι η γραμμική παράσταση είναι ευθεία γραμμή. Σε ανώτερα επίπεδα το βήμα αυτό μπορεί να παραληφθεί και να προχωρήσουμε απευθείας στη μελέτη της γραμμικής παράστασης μιας γραμμικής συνάρτησης ανάλογα με τη μεταβολή των παραμέτρων της.

Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $f(x)=2x$, την οποία ορίζουμε στο Mathematica ως εξής:

```
f[x_] := 2 * x
```

Δημιουργούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

```
Table[f[x], {x, -4, 4, 1}]
```

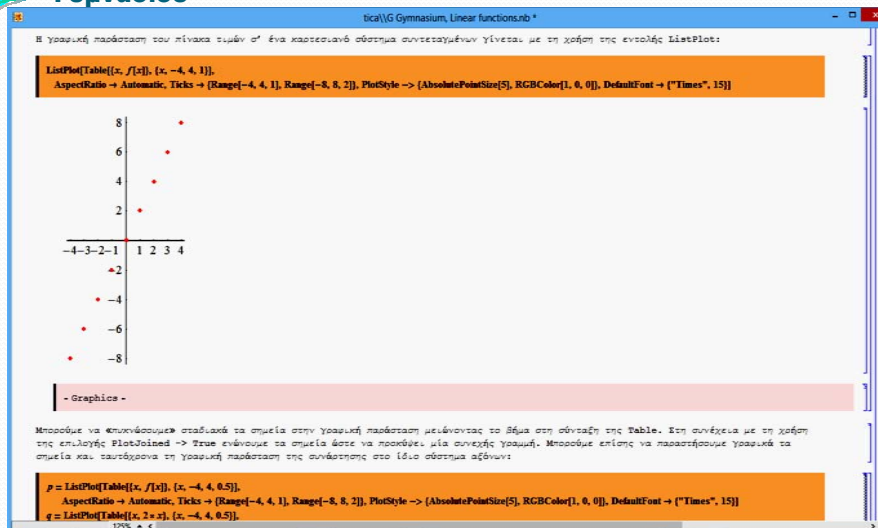
```
{{-4, -8}, {-3, -6}, {-2, -4}, {-1, -2}, {0, 0}, {1, 2}, {2, 4}, {3, 6}, {4, 8}}
```

Ο πίνακας τιμών μπορεί να πάρει την «παραδοσιακή» μορφή που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά με τη χρήση της εντολής TableForm:

```
TableForm[Table[f[x], {x, -4, 4, 1}], TableHeadings -> {None, {"x", "f(x)"}}]
```

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

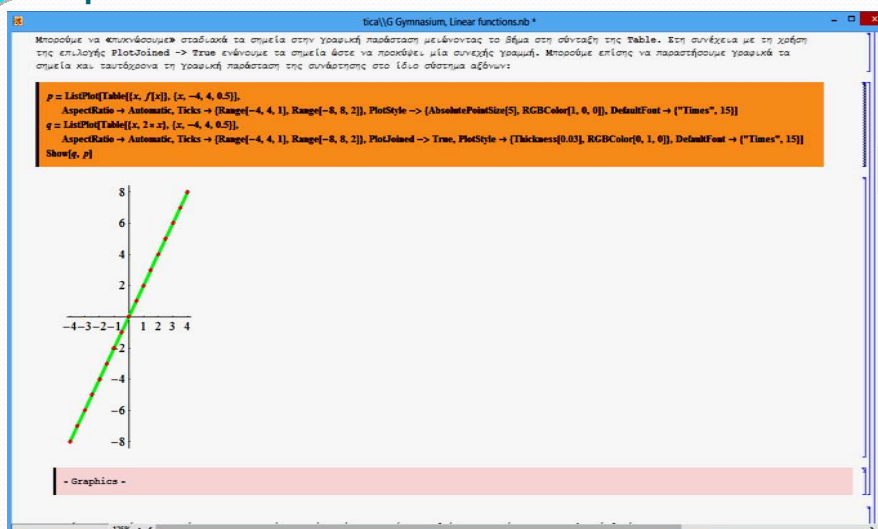
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

23

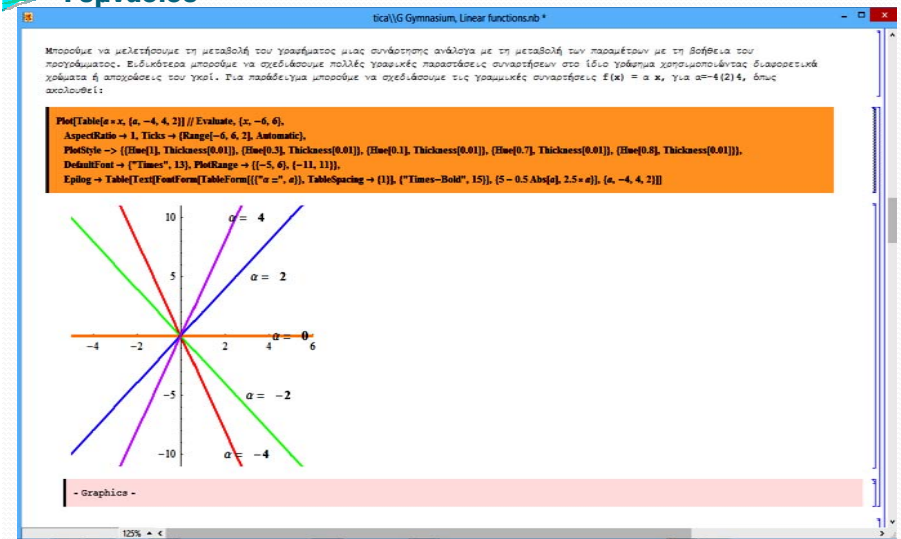
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

24

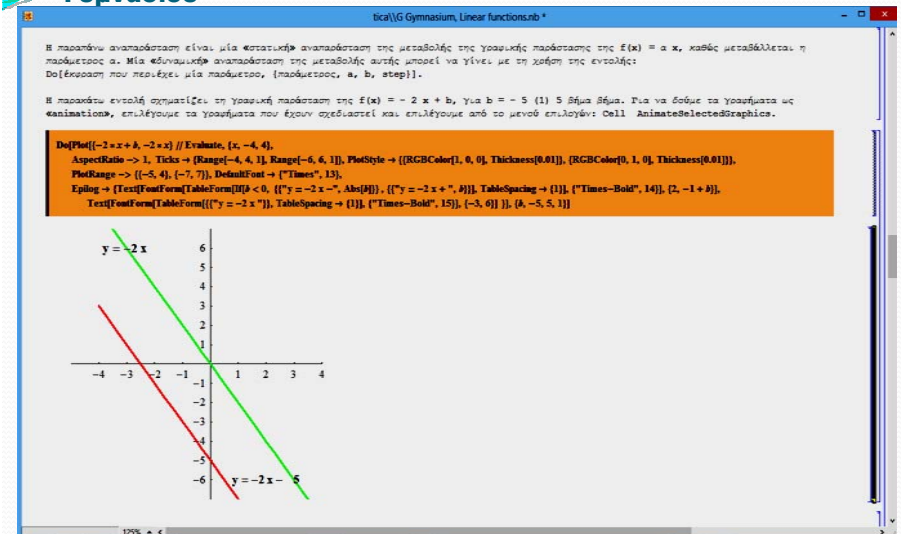
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

25

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

26

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου

Μπορούμε να μελετήσουμε τις γραμμικές συναρτήσεις, δημιουργώντας υποπρογράμματα στο Mathematica, μέσω των οποίων δημιουργούμε τον πίνακα τιμών συνάρτησης, απεικονίζουμε τα σημεία του πίνακα τιμών σε ένα σύστημα αξόνων και δημιουργούμε μια αναπαράσταση του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας, ώστε να τον συσχετίσουμε με την ελαττωμένη που σχηματίζει η γραμμή παράσταση της ευθείας με τον άξονα $x'x$.

Ευδοκίτσα έχουμε τα υποπρογράμματα `pinakastimon[f, {a,b,step}]`, `axodiasepinaka[f, {a,b,step}, {color, enosi}]` και `Synlestestis[f, {a,b,step}]` αντίστοιχα.

Δημιουργούμε τα υποπρογράμματα:

```
pinakastimon[f_, {a_, b_, step_}] := TableForm[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}], TableHeadings -> {None, {"x"}}, TableAlignments -> Right, TableDirections -> Row]
```

```
axodiasepinaka[f_, {a_, b_, step_}, {color_, enosi_}] :=
ListPlot[Table[{x, f[x]}, {x, a, b, step}], PlotStyle -> {If[enosi == True, Thickness[0.015], AbsolutePointSize[4]}, color], PlotJoined -> If[enosi == True, True, False],
AspectRatio -> Automatic, Ticks -> {Range[a, b, 1], Range[Min[Table[f[x], {x, a, b}], Max[Table[f[x], {x, a, b}]], 1]}, DefaultFont -> {"Times", 16}]
```

```
Synlestestis[f_, {a_, b_, step_}] :=
Do[Plot[f[x], {x, a, b}], PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1], Ticks -> {Range[a, b, 1], Range[Min[Table[f[x], {x, a, b}], Max[Table[f[x], {x, a, b}]], 1]},
DefaultFont -> {"Times", 16}, PlotRange -> {{a - 1, b + 1}, {-1 + Min[Table[f[x], {x, a, b}], 1 + Max[Table[f[x], {x, a, b}]]}},
AspectRatio -> Automatic, Epilog -> {Disk[{x, f[x]}, 0.15], Hue[1], Line[{(x, f[x]), (0, f[x])}], Hue[0.3], Line[{(x, f[x]), (x, 0)]}], {x, a, b, step}]]
```

Θεωρούμε τη γραμμική παράσταση της $f(x) = 2x$, δημιουργούμε τον πίνακα τιμών της και απεικονίζουμε τα σημεία του πίνακα τιμών σε ένα σύστημα αξόνων:

```
f[x_] := 2*x
```

```
pinakastimon[f, {-4, 4, 1}]
```

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

27

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου

```
p1 = axodiasepinaka[f, {-4, 4, 1}, {Hue[1], False}]
p2 = axodiasepinaka[f, {-4, 4, 1}, {Hue[0.3], True}]
Show[p2, p1]
```

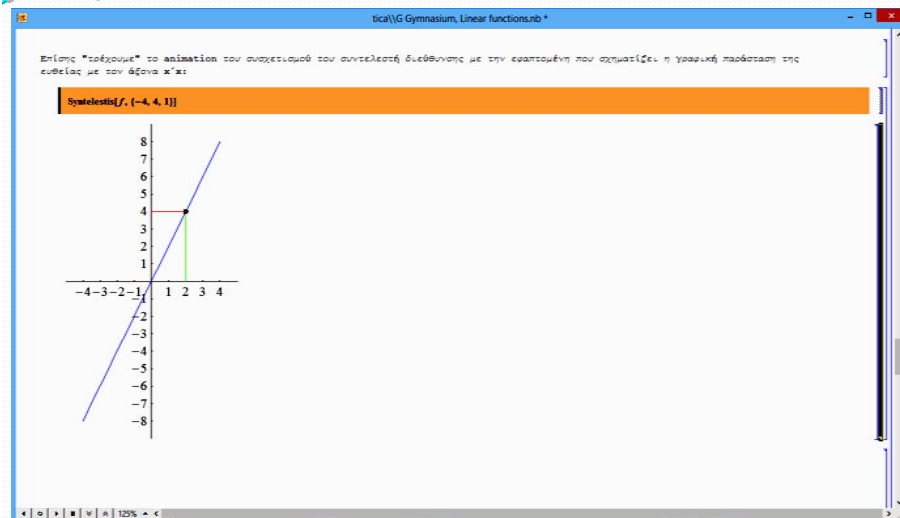
- Graphics -

Επίσης "τράχουμε" το animation του συσχετισμού του συντελεστή διεύθυνσης με την ελαττωμένη που σχηματίζει η γραμμή παράσταση της ευθείας με τον άξονα $x'x$:

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

28

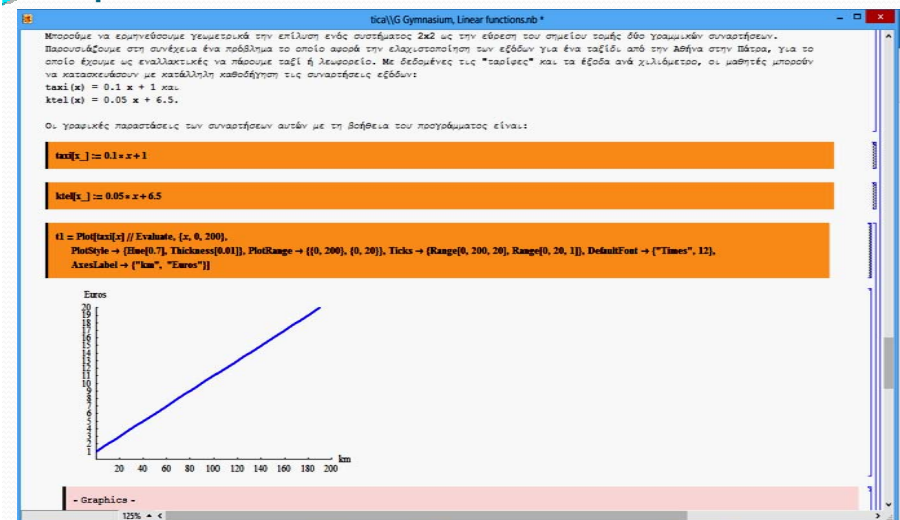
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

29

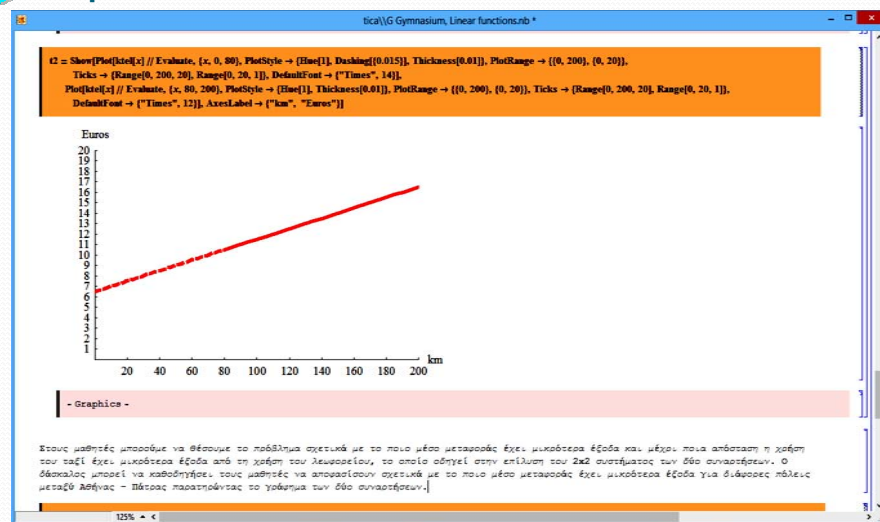
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

30

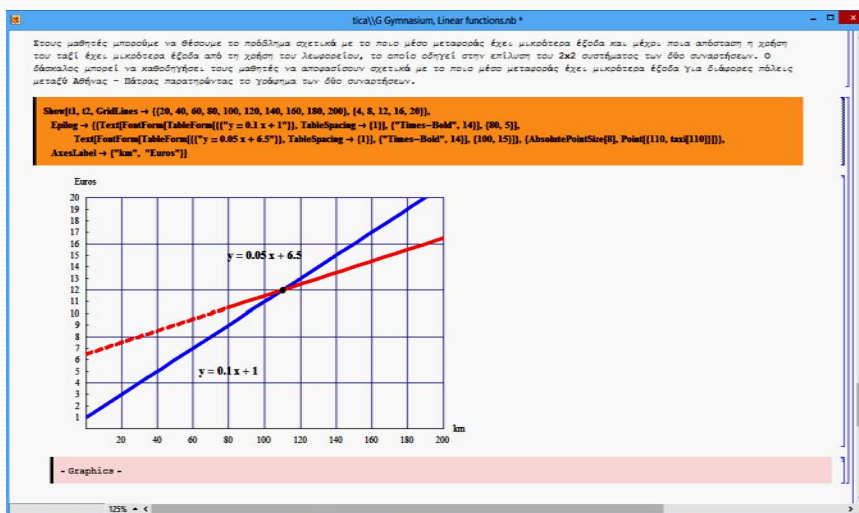
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

31

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στις γραμμικές συναρτήσεις Γ' Γυμνασίου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

32

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\VA Lyceum, Studying functions.nb

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ MATHEMATICA

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΟΡΡΕΣ

ΠΡΟΛΟΓΙΣΜΟΣ: Στο παρόν ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας για τις «βιωματικές» αναπαραστάσεις, έχει γίνει χρήση της εντολής: `Do[έκδοση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n, n1, n2, step}],` η οποία ισχύει στις παλαιότερες εκδόσεις του Mathematica (όπως οι εκδόσεις 4 και 5). Αν χρησιμοποιείτε μία νεότερη έκδοση του Mathematica (όπως η έκδοση 10), τροποποιείτε την παραπάνω εντολή σε: `Manipulate[έκδοση που περιέχει μία παράμετρο, {παράμετρος n, n1, n2, step}].`

Από τη μέρα, τόσο γνώση μας για τις συναρτήσεις, έχει φανεί ότι είναι πολύ σημαντική για τη σύνδεση των δύο μεταβλητών της συνάρτησης, να γνωρίζουμε την γραμμή της παράστασης.

Όπως έχουμε δει στην Γ' Γυμνασίου, η πρωτοβάθμια συνάρτηση $f(x)=ax+b$ έχει γραμμική παράσταση μία ευθεία, σχήμα πολύ εύκολο κατασκευάσιμο, δεδομένου ότι ασκούν μόνο δύο σημεία.

Στην περίπτωση μη πρωτοβαθμίων συναρτήσεων, όπου η γραμμική παράσταση είναι **καμυλωτή**, δεν είμαστε σε θέση να σχεδιάσουμε μια γραμμική παράσταση με ακρίβεια. Μπορούμε όμως για παράδειγμα να μελετήσουμε την θέση που έχουν οι τιμές της συνάρτησης να «αυξάνονται» ή να «μειώνονται» καθώς αυξάνεται οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x και διάφορα άλλα ιδιότητες της συνάρτησης.

Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε τη διαδικασία που συστηματικά αναλύουμε «**Μελέτη Συνάρτησης**».

Η προσέγγιση που ακολουθεί έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητευόμενους να κατασκευάσουν τη έννοια της συνάρτησης μέσω της μελέτης της γραμμικής παράστασης της συνάρτησης (γεωμετρικά) και του πίνακα τιμών της συνάρτησης.

Τα θέματα που μελετάμε είναι:

1. Γραμμική παράσταση συνάρτησης
2. Πεδίο ορισμού = σύνολο τιμών συνάρτησης
3. Συμμετρικές συνάρτησης (όσους και περυστή συνάρτησης)
4. Μονοτονία συνάρτησης (γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα συνάρτησης) και ακρότατα συνάρτησης (μέγιστο και ελάχιστο συνάρτησης)
5. Μελέτη των συναρτήσεων $y = ax + b$
6. Μελέτη των συναρτήσεων $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

33

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\VA Lyceum, Studying functions.nb

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3. ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

4. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

5. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $y = ax + b$

6. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

34

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lycium, Studying functions.nb *

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 4$:

$$f(x) := x^3 - 2x^2 - 8x + 4$$

Δημιουργούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης για x από -3 έως 3 με βήμα 1 :

```
TableForm[
Table[{x, f[x]}, {x, -3, 3, 1}], TableHeadings -> {None,
{"x", "f(x)"}, TableAlignments -> Center, TableDirections -> Row]
```

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-17	4	9	4	-5	-12	-11

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του πίνακα τιμών σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

```
ListPlot[Table[{x, f[x]}, {x, -3, 3, 1}],
AspectRatio -> 1, Ticks -> {Range[-4, 4, 1], Range[-20, 12, 2]}, PlotRange -> {{-4, 4}, {-20, 12}}, PlotStyle -> {AbsolutePointSize[5], RGBColor[1, 0, 0]},
AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

125% ◀ ◻

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

35

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lycium, Studying functions.nb *

2. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2 - |x|} + 2x + 1$:

$$f(x) := \sqrt{2 - \text{Abs}[x]} + 2x + 1$$

Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση σημείων της συνάρτησης σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

```
k = Plot[f[x], {x, -2, 2}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.015]}, AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{-3, 3}, {-4, 6}}, Ticks -> {Range[-3, 3, 1], Range[-4, 6, 1]}]
```

Graphics -

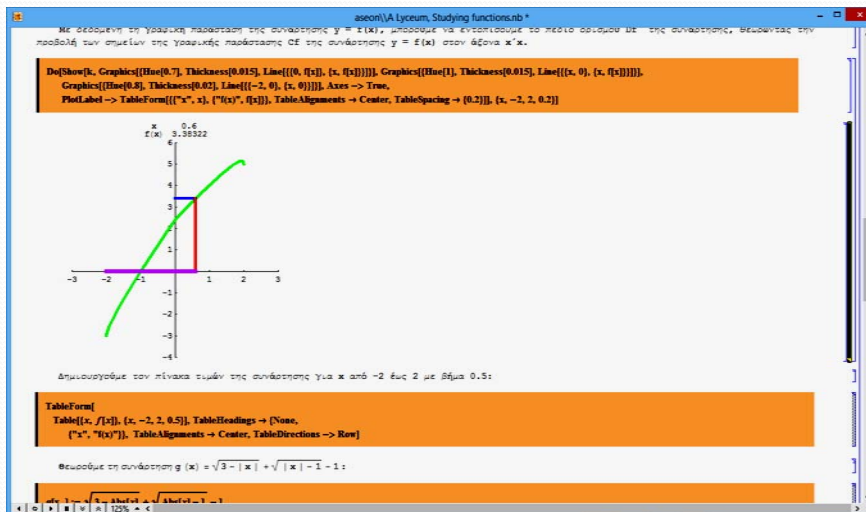
Με δεδομένη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, μπορούμε να εντοπίσουμε το πεδίο ορισμού ΔΕ της συνάρτησης, θεωρώντας την

125% ◀ ◻

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

36

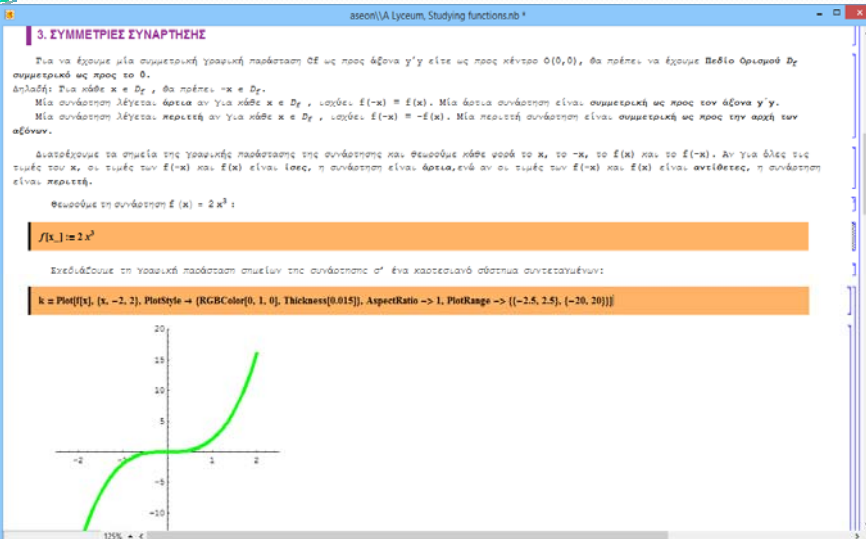
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

37

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

38

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

Διατρέχουμε τα σημεία της γραμμικής παράστασης της συνάρτησης και θεωρούμε κάθε φορά το x , το $-x$, το $f(x)$ και το $f(-x)$:

```

Do[Show[Graphics[{Hue[0.7], Thickness[0.012], Line[{0, f[x]}, {x, f[x]}]}], Graphics[{Hue[1], Thickness[0.012], Line[{x, 0}, {x, f[x]}]}],
Graphics[{Hue[0.7], Thickness[0.012], Line[{0, f[-x]}, {-x, f[-x]}]}], Graphics[{Hue[1], Thickness[0.012], Line[{x, 0}, {-x, f[-x]}]}],
Graphics[{Hue[0.8], Thickness[0.012], Line[{x, f[x]}, {-x, f[-x]}]}], Axes -> True,
PlotLabel -> TableForm[{"x", x}, {"f(x)", f[x]}, {"-x", -x}, {"f(-x)", f[-x]}], TableAlignments -> Center, TableSpacing -> {0.2}], {x, -1.9, 1.9, 0.2}]

```

Θεωρούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

```

TableForm[
Table[{x, f[x]}, {x, -2, 2, 0.5}], TableHeadings -> {None,
{"x", "f(x)"}}], TableAlignments -> Center, TableDirections -> Row]

```

Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις συμμετρίες της $y = f(x)$:

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

39

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

Θεωρούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

```

TableForm[
Table[{x, f[x]}, {x, -2, 2, 0.5}], TableHeadings -> {None,
{"x", "f(x)"}}], TableAlignments -> Center, TableDirections -> Row]

```

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
f(x)	-16	-6.75	-2	-0.25	0	0.25	2	6.75	16

Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τις συμμετρίες της $y = f(x)$:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x^4$:

```

g[x_] := 2 x^4

```

Σχεδιάζουμε τη γραμμική παράσταση σημείων της συνάρτησης σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

```

m = Plot[g[x], {x, -2.1, 2.1}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.015]}, AspectRatio -> 1, PlotRange -> {{-2.5, 2.5}, {-4, 34}}, DefaultFont -> {"Times", 15}]

```

Διατρέχουμε τα σημεία της γραμμικής παράστασης της συνάρτησης και θεωρούμε κάθε φορά το x , το $-x$, το $g(x)$ και το $g(-x)$:

```

Do[Show[m, Graphics[{Hue[0.7], Thickness[0.012], Line[{0, g[x]}, {x, g[x]}]}], Graphics[{Hue[1], Thickness[0.012], Line[{x, 0}, {x, g[x]}]}],
Graphics[{Hue[0.7], Thickness[0.012], Line[{0, g[-x]}, {-x, g[-x]}]}], Graphics[{Hue[1], Thickness[0.012], Line[{x, 0}, {-x, g[-x]}]}],
Graphics[{Hue[0.8], Thickness[0.012], Line[{x, g[x]}, {-x, g[-x]}]}], Axes -> True,
PlotLabel -> TableForm[{"x", x}, {"g(x)", g[x]}, {"-x", -x}, {"g(-x)", g[-x]}], TableAlignments -> Center, TableSpacing -> {0.2}], {x, -2, 2, 0.1}]

```

Θεωρούμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

40

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lycium, Studying functions.nb *

4. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Με δεδομένη τη γραμμική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, μπορούμε να διαπιστώσουμε τη μονοτονία της. Συγκεκριμένα αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα έχει γραμμική παράσταση που «ανεβαίνει» καθώς το x μεγαλώνει, ενώ αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα έχει γραμμική παράσταση που «κατεβαίνει» καθώς το x μεγαλώνει.

Αν διασκόψουμε λοιπόν τα σημεία της γραμμικής παράστασης της συνάρτησης ώστε το x να μεγαλώνει, τότε αν το $y = f(x)$ μεγαλώνει επίσης, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν το $y = f(x)$ μικραίνει, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Ως προς τα ακρότατα, το μέγιστο της συνάρτησης, εάν υπάρχει, θα είναι το υψηλότερο σημείο της γραμμικής της παράστασης, ενώ το ελάχιστο, εάν υπάρχει, θα είναι το χαμηλότερο σημείο της.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 4$:

$f[x_] := 2x - 4$

Σχεδιάζουμε τη γραμμική παράσταση σημείων της συνάρτησης σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων:

$k = \text{Plot}[f[x], \{x, -4, 5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[0, 1, 0], \text{Thickness}[0.015]\}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{PlotRange} \rightarrow \{-4, 5\}, \{-11, 5\}]$

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

41

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lycium, Studying functions.nb *

Διατρέχουμε τα σημεία της γραμμικής παράστασης της συνάρτησης ώστε το x να μεγαλώνει και παρατηρούμε αν το $y = f(x)$ μεγαλώνει ή μικραίνει:

$\text{Do}[\text{Show}[k, \text{Graphics}[\{\text{Line}[\{\text{Blue}[0.7], \text{Thickness}[0.015], \text{Line}[\{0, f[x]\}], \{x, f[x]\}\}], \text{Graphics}[\{\text{Line}[\{\text{Red}[1], \text{Thickness}[0.015], \text{Line}[\{x, 0\}], \{x, f[x]\}\}], \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{PlotLabel} \rightarrow \text{TableForm}[\{\{\text{"x"}, x\}, \{\text{"f(x)"}, f[x]\}], \text{TableAlignments} \rightarrow \text{Center}, \text{TableSpacing} \rightarrow \{0.2\}], \{x, -3, 4, 0.5\}]$

Αντιπροσωπεύουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης:

$\text{TableForm}[\text{Table}[\{x, f[x]\}, \{x, -3, 4, 0.5\}], \text{TableHeadings} \rightarrow \{\text{None}, \{\text{"x"}, \text{"f(x)"}\}], \text{TableAlignments} \rightarrow \text{Center}, \text{TableDirections} \rightarrow \text{Row}]$

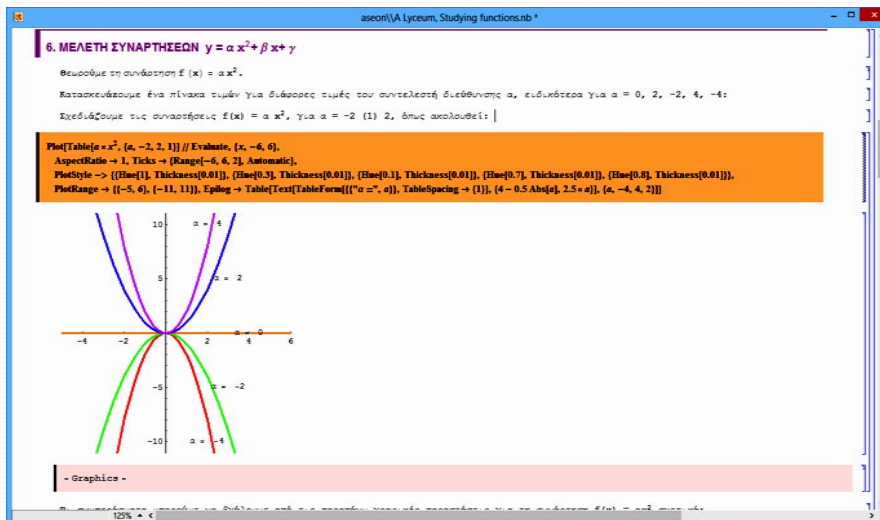
x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
f(x)	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε για τη μονοτονία και τα ακρότατα της $y = f(x)$:

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

42

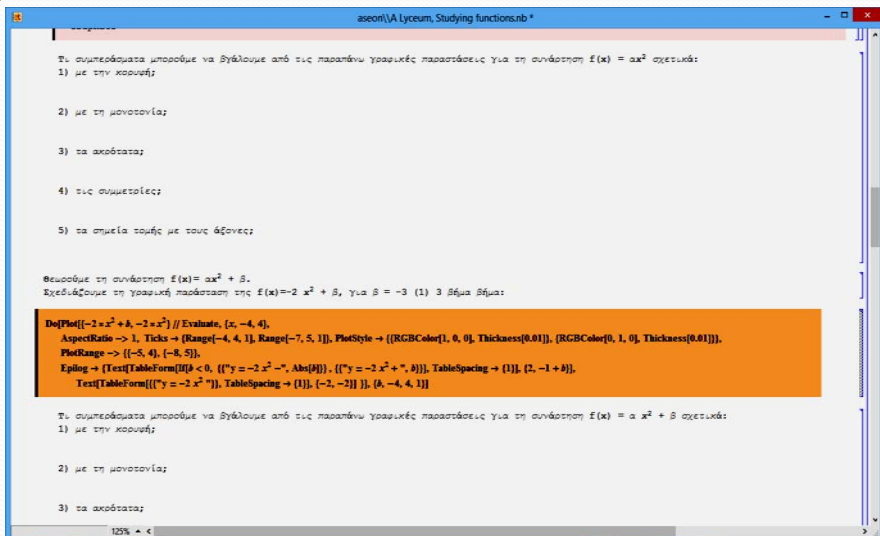
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

43

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

44

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lyceum, Studying functions.nb *

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta$.
 Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^2 + \beta$, για $\beta = -3$ (1) 3 βήμα βήμα:

```
Do[Plot[[-2*x^2+β,-2*x^2]]//Evaluate,{x,-4,4},
  AspectRatio->1,Ticks->{Range[-4,4,1],Range[-7,5,1]},PlotStyle->{{RGBColor[1,0,0],Thickness[0.01]},
  {RGBColor[0,1,0],Thickness[0.01]}},
  PlotRange->{{-5,4},{-8,5}},
  Epilog->{Text[TableForm[{β<0,{{"γ=-2x^2-","Abs[β]"},{{"γ=-2x^2+","β"}},TableSpacing->{1},{2,-1+β}},
  Text[TableForm[{{"γ=-2x^2"}},TableSpacing->{1},{-2,-2}],{β,-4,4,1}]}],
  TableSpacing->{1},{-2,-2}],{β,-4,4,1}]
```

Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta$ σχετικά:

- 1) με την κορυφή;
- 2) με τη μονοτονία;
- 3) τα ακρότατα;

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

45

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου

aseon\A Lyceum, Studying functions.nb *

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a \neq 0$.
 Γνωρίζουμε ότι $f(x) = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, όπου $a \neq 0$, $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$:

$f(x) = -2x^2 + 8x + 3$

Κάνουμε το μετασχηματισμό $f(x) = a(x+k)^2 + \lambda$, όπου $k = -\frac{\beta}{2a}$, $\lambda = -\frac{\Delta}{4a}$ με $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

$a = -2$; $b = 8$; $c = 3$;
 $k = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2$; $\lambda = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{(8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3)}{4 \cdot (-2)} = 11$;
 $k; \lambda$;

TableForm[{{{"f(x) = ax^2+bx+c = ", a x^2 + b x + c}, {"a = ", a}, {"b = ", b}, {"c = ", c}, {"x = -\frac{\beta}{2a} = ", k}, {"λ = -\frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a} = ", λ}}, {"f(x) = a(x+k)^2 + λ = ", a (x+k)^2 + λ}], TableAlignments->Center, TableDirections->Column]

$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma =$	$-2x^2 + 8x + 3$
$a =$	-2
$\beta =$	8
$\gamma =$	3
$k = -\frac{\beta}{2a} =$	2
$\lambda = -\frac{\beta^2 - 4a\gamma}{4a} =$	11
$f(x) = a(x+k)^2 + \lambda =$	$-2(x+2)^2 + 11$

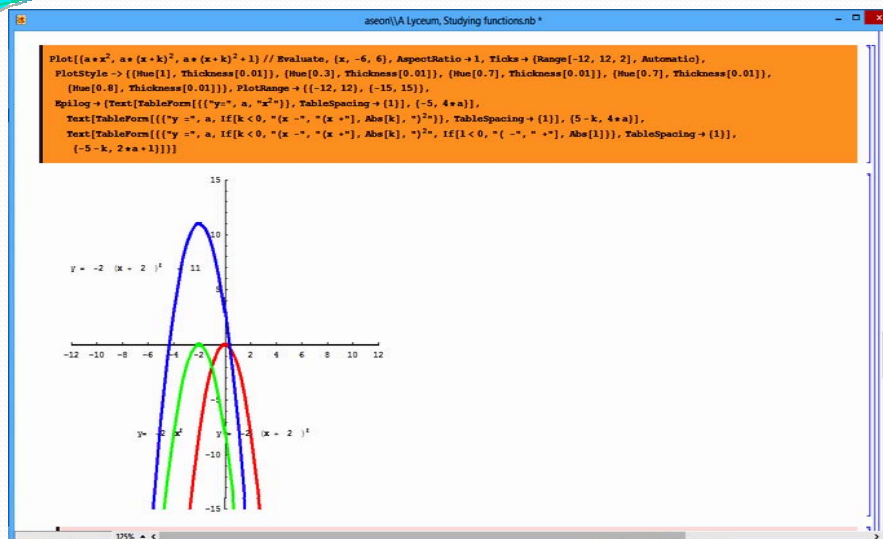
Plot[{a*x^2, a*(x+k)^2, a*(x+k)^2+1} // Evaluate, {x, -6, 6}, AspectRatio->1, Ticks->{Range[-12, 12, 2], Automatic},

125% <

Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

46

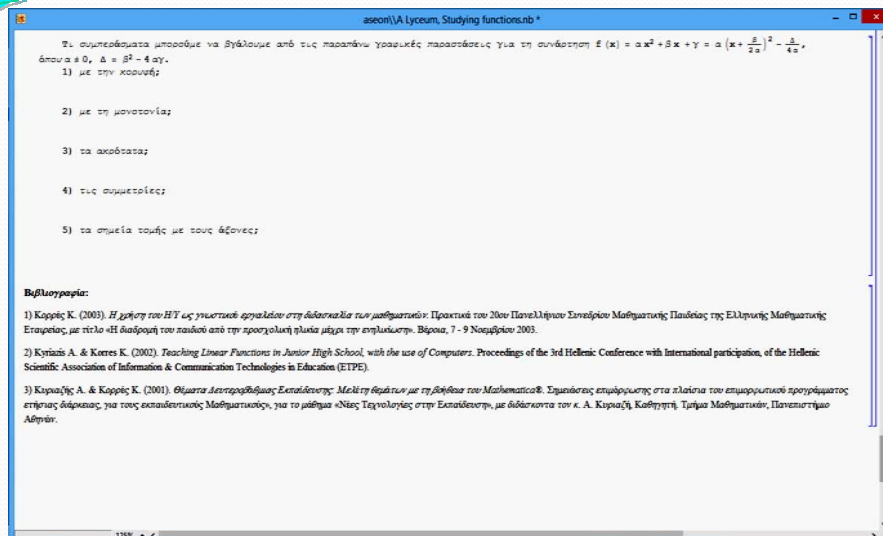
Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

47

Ηλεκτρονικό φύλλο εργασίας στη μελέτη συνάρτησης Α' Λυκείου



Δρ Κορρές Κωνσταντίνος

48

Βιβλιογραφία

- Κυριαζής Αθανάσιος, Ψυχάρης Σαράντος & Κορρές Κωνσταντίνος (2012). *Η διδασκαλία και μάθηση των Θετικών Επιστημών με τη βοήθεια του Υπολογιστή: Μοντελοποίηση, Προσομοίωση και εφαρμογές*. Εκδόσεις Παπαζήση.
- Κορρές Κ. (2007). Μία διδακτική προσέγγιση των μαθημάτων Θετικών Επιστημών με τη βοήθεια νέων τεχνολογιών. Διδακτορική διατριβή. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Κορρές Κ. (2003). Η χρήση του Η/Υ ως γνωστικού εργαλείου στη διδασκαλία των μαθηματικών. Πρακτικά του 20ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, με τίτλο «Η διαδρομή του παιδιού από την προσχολική ηλικία μέχρι την ενηλικίωση». Βέροια, 7 – 9 Νοεμβρίου 2003.
- Κυριαζής Α. & Κορρές Κ. (2001). *Θέματα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Μελέτη θεμάτων με τη βοήθεια του Mathematica*. Σημειώσεις επιμόρφωσης στα πλαίσια του «Επιμορφωτικού προγράμματος ετήσιας διάρκειας, για τους εκπαιδευτικούς Μαθηματικών», για το μάθημα «Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση», με διδάσκοντα τον κ. Α. Κυριαζή, Καθηγητή. Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Kyriazis A. & Korres K. (2002). Teaching Linear Functions in Junior High School, with the use of Computers. Proceedings of the 3rd Hellenic Conference with International participation, of the Hellenic Scientific Association of Information & Communication Technologies in Education (ETPE).

Βιβλιογραφία

- Kyriazis A. & Korres K. (2002). *Teaching Linear Functions in Junior High School, with the use of Computers*. Proceedings of the 3rd Hellenic Conference with International participation, of the Hellenic Scientific Association of Information & Communication Technologies in Education (ETPE).
- Torrence Br. & Torrence E. (1999): *The Students Introduction to Mathematica®*. Cambridge University Press.
- Wolfram St. (1996): *The Mathematica Book* (3rd Edition). Cambridge University Press.
- Gray A. (1998). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica®*. CRC Press.
- Jonassen D. H. (2000). *Computers as Mindtools for Schools: Engaging Critical Thinking (2nd Edition)*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- Kyriazis, A., Psycharis, S. & Korres, K. (2009). "Discovery Learning and the Computational Experiment in Higher Mathematics and Science Education: A combined approach". *International Journal of Emerging Technologies in Learning of the International Association of Online Engineering*, Volume 4, Issue 4 (doi:10.3991/ijet.v4i4.1044).